

Princípios do limite e continuidade

Prof.ª Ana Lúcia de Sousa

Descrição

Introdução ao estudo de limite e continuidade de funções de uma variável, cálculo de limites de funções que apresentam indeterminações, cálculo de limites laterais e análise da continuidade de funções.

Propósito

Compreender o conceito de limite, já que grande parte do desenvolvimento teórico do cálculo é feita utilizando essa noção.

Objetivos

Módulo 1

Limite de funções

Identificar intuitivamente o conceito de limite de funções.

Módulo 2

Limites de funções algébricas com indeterminações

Calcular limites de funções algébricas com indeterminações.

Módulo 3

Limites laterais

Calcular limites laterais.

Módulo 4

Continuidade das funções

Reconhecer a continuidade de funções.

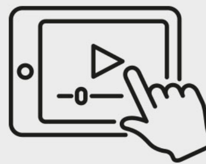


Introdução

Você já se perguntou por que é importante estudar os princípios de limite e continuidade?

Neste vídeo, vamos entender a importância de conhecer os princípios de limite e continuidade para os estudos de métodos quantitativos. Confira!

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Limite de funções

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar intuitivamente o conceito de limite de funções.

Conceito de limite de funções

Agora que já conhecemos a importância dos princípios de limite e continuidade, vamos analisar, a partir do gráfico de uma função polinomial do primeiro grau, o comportamento da função em determinado ponto do domínio a fim de compreender o conceito de limite de funções.



O que é limite de funções?

Veja a seguir o conceito de limite.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Vamos relembrar?

Se $\mathrm{f}(x)$ se aproxima de um número real L à medida que x se aproxima de um número real a de ambos os lados, então L é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a. Esse comportamento é representado por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Observe que o limite de uma função polinomial pode ser determinado por meio da substituição direta.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Agora, vamos conhecer alguns exemplos.

Exemplo 1

Determine $\lim_{x \to 2} \left(2x^2 + 3x - 1\right)$

Como devemos proceder? Tente resolver o problema e veja a solução a seguir.

Dica: Basta substituir $x = 2$ na função.

Solução:

$$\lim_{x \to 2} \left(2x^2 + 3x - 1\right) = 2(2)^2 + 3(2) - 1 = 2.4 + 6 - 1 = 8 + 6 - 1 = 13$$

Exemplo 2

Determine o limite $\lim_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-3}{2x-1}$

Que tal praticar mais uma vez? Tente resolver o problema e veja a solução a seguir.

Dica: A substituição ocorre no numerador e no denominador da função.

Solução:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 2x - 3}{2x - 1} = \frac{3(-1)^2 + 2(-1) - 3}{2(-1) - 1} = \frac{3.1 - 2.1 - 3}{-2 - 1} = \frac{3 - 2 - 3}{-2 - 1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Exemplo 3

Determine o limite $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2+x-3}{2x-1}\right)^2$

Solução:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{2x - 1} \right)^2 = \left(\frac{-1^2 + 1 - 3}{2. -1 - 1} \right)^2 = \left(\frac{1 + 1 - 3}{2 - 1} \right)^2 = \left(\frac{-1}{-1} \right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Exemplo 4

Determine o limite $\lim_{x \to -2} \sqrt{\frac{x^3+3x^2-3x+3}{x^3+4x+2}}$

Solução:

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 3}{x^3 + 4x + 2}} = \sqrt{\frac{(-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) + 6}{(-2)^3 + 4(-2) + 2}} = \sqrt{\frac{-8 + 3 \cdot 4 + 6 + 6}{4 - 8 + 2}} = \sqrt{\frac{-8}{}}$$

Depois de conhecer os limites de funções, e ver alguns exemplos, chegou a hora de resolver algumas questões sobre o assunto.

Atividades

Questão 1

Se $y = f(x)$ é uma função real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 9 & \text{se } x \neq -3 \\ 5 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

O $\lim_{x \to -3} f(x)$ será:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

No cálculo do limite, interessa analisar o comportamento da função quando x se aproxima de -3 e não o que ocorre com a função quando $x =$ -3. Assim temos:

$$\lim_{x \to -3} f(x)$$
$$\lim_{x \to -3} -x^2 + 3x + 9 = -(-3)^2 + 3(-3) + 9 = -9 - 9 + 9$$

Questão 2

O limite $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2x^2+3x+2}{6-2x}}$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

O limite da função dada será calculado através da substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando, nesse caso 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+3x+2}}{6-2x}=\sqrt{\frac{2(2)^2+3(2)+2}{6-2(2)}}=\frac{\sqrt{2.4+3(2)\cdot}}{6-2(2)}$$

Questão 3

O limite $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-2x-2}{-x^2+2x+4}\right)^3$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

O limite da função será calculado por meio da substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, 2.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-2x-2}{-x^2+2x+4}\right)^3=\left(\frac{3(2)^2-2(2)-2}{-(2)^2+2(2)+4}\right)^3=\left(\frac{3.4^2-}{-4+}\right.$$

Questão 4

O limite $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x+3}{x^2-5x+1}$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

O limite da função será calculado por meio da substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, 1/2.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x+3}{x^2-5x+1} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}\right)+3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\left(\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}+5\left(\frac{1}{2}\right)+}{\left(\frac{1}{2}\right)-5\left(\frac{1}{2}\right)+}$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

(UFU) Sabendo-se que $\lim_{x \to 2} \frac{x+3m}{x-m} = \frac{4}{3}, x \neq m,$ então podemos afirmar que:

A m é maior do que 4.

B m é menor do que -4.

C $\mathrm{m} \in [1;4]$

D $\mathrm{m} \in [-4;1]$

E $\mathrm{m} \in [-1,4]$

Parabéns! A alternativa D está correta.

$$lim_{x\to 2}\frac{2+3m}{2-m}=\frac{4}{3}$$

Vamos calcular primeiro o limite da função quando x se aproxima de $2 .$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3m}{x-m}=\frac{2+3m}{2-m}$$

$$\frac{2+3m}{2-m}=\frac{4}{3}$$

$$3\cdot(2+3m)=4\cdot(2-m)$$

$$6+9m=8-4m$$

$$9m+4m=8-6$$

$$9m+4m=8-6\Rightarrow 13m=2\Rightarrow m=2/13\in[-4;1]$$

Questão 2

$$\text{(UEL) O valor do limite }\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+\frac{1}{2}}\text{ é:}$$

A -5/2

B -3/2

C -2/5

D -1

E -2

Parabéns! A alternativa C está correta.

O limite da função será calculado através da substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, 2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+\frac{1}{2}} = \frac{2-3}{2+\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{4+1}{2}} = \frac{-1}{\frac{5}{2}} = -1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$$



2 - Limites de funções algébricas com indeterminações

Ao final deste módulo, você será capaz de calcular limites de funções algébricas com indeterminações.

Limites de funções algébricas com indeterminações

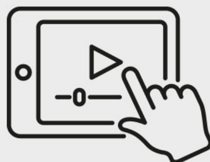
Sabemos que o limite de funções pode ser calculado por meio da substituição direta. Entretanto, há funções cujo limite nem sempre pode ser encontrado dessa forma. Vamos conhecer um pouco mais sobre funções algébricas com indeterminações.



Funções algébricas com indeterminações

Veja um exemplo dessas funções.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Vamos relembrar?

No cálculo de limites de funções com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, podemos recorrer aos casos de fatoração de expressões algébricas com a finalidade de cancelar a indeterminação. Uma vez que ela é cancelada, podemos determinar o limite da função por meio da substituição direta.

Antes de desenvolvermos a parte algébrica (ou usar os casos de fatoração), devemos verificar se o cálculo do limite gera uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Agora, vamos conhecer alguns exemplos.

Exemplo 1

$$\text{Determine o limite da função } \lim_{x \to 1} \frac{3x - 3}{x^2 - 1}.$$

Solução:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{3(1) - 3}{(1)^2 - 1} = \frac{3 - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Dica: Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para *x* = 1.

$$\frac{3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{3(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Fatoração do numerador e do denominador

$$= \frac{3\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}$$

Cancelamento do fator comum

$$= \frac{3}{(x + 1)}$$

$$\text{Agora basta calcular o limite } \lim_{x \to 1} \frac{3}{x + 1}.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3}{x + 1} = \frac{3}{(1 + 1)} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 2

$$\text{Determine o limite da função } \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

Solução:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = \frac{(4)^2 - 16}{(4)^2 - 4(4)} = \frac{16 - 16}{16 - 16} = \frac{0}{0}$$

Continuando a solução:

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)}$$ Fatoração do numerador e do denominador

$$= \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{x\cancel{(x-4)}}$$ Cancelamento do fator comum

$$= \frac{(x+4)}{x}$$

$$\text{Agora basta calcular o limite } \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)}{x}.$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(x+4)}{x} = \frac{4+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Exemplo 3

$$\text{Determine o limite da função } \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Solução:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(1)^3 - 1}{(1) - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Fatoração da expressão

$$x^3 - 1$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$x^3 - 1^3 = (x - 1)\left(x^2 + x.1 + 1^2\right) = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$ Fatoração do numerador

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$ Cancelamento do fator comum

$$= (x^2+x+1)$$

$$\text{Agora basta calcular o limite } \lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right) = (1)^2+1+1 = 3$$

Exemplo 4

$$\text{Determine o limite da função } \lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}.$$

Solução:

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5} = \frac{(-5)^2+3(-5)-10}{-5+5} = \frac{0}{0}$$

Observação:

Fatoração do trinômio: ax^2+bx+c, com $a \neq 0$.

$ax^2+bx+c = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, em que x_1 e x_2 são as raízes reais da equação $ax^2+bx+c=0$

Fatoração da expressão $x^2+3x-10$.

Fazendo $x^2+3x-10=0$, temos uma equação do 2° grau com raízes $x_1=2$ e $x_2=-5$

$$x^2+3x-10 = (x-2)(x-(-5)) = (x-2)(x+5)$$

$$\frac{x^2+3x-10}{x+5} = \frac{(x-2)(x+5)}{x+5}$$ Fatoração do numerador

$$= \frac{(x-2)(x+5)}{x+5}$$ Cancelamento do fator comum

$$= (x-2)$$

$$\text{Agora basta calcular o limite } \lim_{x\to -5}(x-2)$$

$$\lim_{x \to -5} (x-2) = -5-2 = -7$$

Depois de conhecer os limites de funções algébricas com indeterminações, e ver alguns exemplos, chegou a hora de resolver algumas questões sobre o assunto.

Atividades

Questão 1

Se $f(x)$ é uma função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$, então podemos afirmar que $\lim_{x \to 1} f(x)$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

No cálculo do limite de $f(x)$, interessa analisar o comportamento da função quando

$$x$$

se aproxima de 1 e não o que ocorre com a função quando $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para $x = 1$.

Fatoração da expressão

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2 = 1-2 = -1$$

Questão 2

O limite $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = \frac{0}{0}$$

Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para $x = 3/2$.

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x - 3} = 2x + 3 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 3$$

Questão 3

O limite $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

$$\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \frac{0}{0}$$

Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para $x = \text{a}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)(x^2 +}{x - a}$$

Questão 4

O limite $\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{0}{0}$$

Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para $h = 0$.

Observação:

$$(3 + h)^2 = (3)^2 + 2.3.\,h + (h)^2 = 9 + 6h + h^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

$$\text{(PUC-SP) O limite } \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

A não existe.

B não é nenhum número real.

C vale 0.

D vale 1.

E vale 2.

Parabéns! A alternativa C está correta.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para

$$x = 2$$

.

Fatoração da expressão

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$$

.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x - 2 = 2 - 2 = 0$$

Questão 2

$$\text{O limite } \lim_{x \to -2} \frac{8 + x^3}{4 - x^2} \text{ é igual a:}$$

A 0

B 1

C 2

D 3

E -1

Parabéns! A alternativa D está correta.

$$\lim_{x \to -2} \frac{8+x^3}{4-x^2} = \frac{0}{0}$$

Note que tanto o numerador como o denominador se anulam para $x = -2$.

Fatoração da expressão $8 + x^3$.

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$8 + x^3 = 2^3 + x^3 = (2+x)\left(2^2 - 2x + x^2\right) = (2+x)\left(4 - 2x + x^2\right)$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{8+x^3}{4-x^2} = \frac{(2+x)\left(4-2x+x^2\right)}{(2-x)(2+x)}$$
$$= \frac{\left(4-2x+x^2\right)}{(2-x)} = \frac{4-2(-2)+(-2)^2}{2-(-2)} = \frac{4+4+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$$



3 - Limites laterais

Ao final deste módulo, você será capaz de calcular limites laterais.

Limites laterais

Vamos identificar agora o conceito de limites laterais e como calculá-los em uma função. Além disso, vamos analisar a existência do limite a partir dos resultados dos limites laterais.

$$\text{Considere a função } f(x) = x + 2.$$

Agora observe que:

Verificamos o limite dessa função quando $x \to 3$ (x se aproxima de 3).

Verificamos o limite dessa função quando $x \to 3$ (x se aproxima de 3).

Nas duas situações, vimos que os valores de $f(x)$ se aproximam de 5.

Concluímos que o limite da função existe, pois os valores encontrados à direita e à esquerda de 3 são iguais a 5.

Então, temos a seguinte função:

$$\lim_{x \to 3}(x+2) = 3 + 2 = 5$$

A partir desse comportamento, definimos limites laterais:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Limite lateral à esquerda

Escrevemos assim o limite de uma função f(x), quando x se aproxima de a pela esquerda, é L.

Usamos $x \to a^-$ para indicar que os valores de x são menores que $\boldsymbol{a}$.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Limite lateral à direita

Escrevemos assim o limite de uma função f(x), quando x se aproxima de a pela direita, é L.

Usamos $x \to a^+$ para indicar que os valores de $\boldsymbol{x}$ são maiores que $\boldsymbol{a}$..

$$\text{Por exemplo, com relação ao limite } \lim_{x\to 3}(x+2) = 5\text{, temos:}$$

O limite da $f(x)$ quando x tende a 3 pela direita é igual a 5 e indicamos por:

$$\lim_{x\to 3^n} +(x+2) = 3+2 = 5$$

O limite da $f(x)$ quando x tende a 3 pela esquerda é igual a 5 e indicamos por:

$$\lim_{x\to 3^n} -(x+2) = 3+2 = 5$$

Observe que:

(i) Sendo $x \to a$, o limite de uma função existe quando os limites laterais são iguais.

(ii) Sendo $x \to a$, o limite da função não existe quando os limites laterais são diferentes.

Exemplos

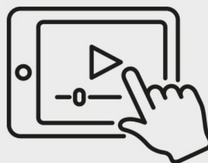
Agora, vamos conhecer alguns exemplos de limites laterais.



Problema com limites laterais - exemplo 1

Veja a solução de um problema com limites laterais.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 2

$$\text{Determine, caso exista, o limite } \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \text{ se } x > 2 \\ -2x + 4 \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$$

Solução:

Vamos verificar o valor da $f(x)$ próximo de 2, e não em $x = 2$.

Para $x < 2$, $f(x) = -2x + 4$, temos:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-2x + 4) = -2(2) + 4 = 0$$

$$\text{Para } x > 2, f(x) = 3x + 1, \text{ temos:}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x + 1) = 3(2) + 1 = 7$$

$$\text{Veja que os limites laterais existem, mas são diferentes. Logo, o limite } \lim_{x \to 2} f(x) \text{ não existe.}$$

Exemplo 3

$$\text{Determine, caso exista, o limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ tende para 2.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ se } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 4 \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Solução:

Vamos verificar o valor da $f(x)$ próximo de 2.

Para $x > 2$, $f(x) = x + 4$, temos:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 4) = 2 + 4 = 6$$

$$\text{Para } x < 2, f(x) = x^2 + 1, \text{ temos:}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(x^2 + 1\right) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Note que os limites laterais são diferentes. O limite da função não existe no ponto 2.

Depois de conhecer os limites laterais, e ver alguns exemplos, chegou a hora de resolver algumas questões sobre o assunto.

Atividades

Questão 1

Seja $f(x)$ uma funçåo definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{se } x \leq -2 \\ 4x + k & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

O limite $\lim_{x \to -2} f(x)$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Verificando os limites laterais:

Para $x > -2$, $f(x) = 4x + k$, temos:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (4x + k) = 4(-2) + k = -8 + k$$

Para $x < -2$, $f(x) = 5x - 3$, temos:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} (5x - 3) = 5(-2) - 3 = -10 - 3 = -1$$

A função existe quando os limites laterais existem e são iguais, então basta igualar os resultados para encontrar o valor de k.

$$-8 + k = -13 \Rightarrow k = -13 + 8 \Rightarrow k = -5$$

Questão 2

Seja $f(x)$ uma funçåo definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O limite $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Verificando o limite lateral à esquerda.

Para $x < 0$, consideramos a função $f(x) = 1 - \cos x$.

O limite da função será calculado pela substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, 0 .

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

Questão 3

Seja $f(x)$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+x} & \text{se } x < -1 \\ \sqrt[2]{1-x^2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x-1} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

O limite $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Verificando o limite lateral à esquerda.

Para $x < -1$, consideramos a função $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)}$. Temos:

O limite da função será calculado pela substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, -1.

O limite da função será calculado pela substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, -1.

$$\lim_{x \to -1_-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \sqrt[3]{1+x} = \sqrt[3]{1+(-1)} = \sqrt[3]{1-1} = 0$$

Questão 4

Seja $f(x)$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + ax - x^2 & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

O valor da constante a para que exista $\lim_{x \to 2} f(x)$ é:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Calculando os limites laterais:

Para $x > 2, f(x) = 2 + ax - x^2$, temos:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(2 + ax - x^2\right) = 2 + a(2) - (2)^2 = 2 + 2$$

Para $x < 2, f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ temos:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = 2 +$$

A função existe quando os limites laterais existem e são iguais.
Vamos igualar os resultados para encontrarmos o valor de k.

$$2a - 2 = 4 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Dada a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leq 3 \\ 8 - 2x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

marque a alternativa que indica o limite

$$\lim_{x \to 3} f(x).$$

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Parabéns! A alternativa C está correta.

Para $x > 3$, $f(x) = 8 - 2x$, temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(8 - 2x) = 8 - 2(3) = 2$$

Para $x < 3$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(x^2 - 3x + 2\right) = (3)^2 - 3(3) + 2 = 2$$

Como os limites laterais são iguais, o limite da função existe.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

Questão 2

Seja

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 2 \\ 3x - 7 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

marque a alternativa que indica o limite

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

A 0

B 1

C 2

D -1

E -2

Parabéns! A alternativa D está correta.

Verificando o limite lateral à direta:

Para $x > 2$, consideramos a funçåo $f(x) = 3x - 7$.

O limite da função será calculado pela substituição direta, isto é, substituindo o x pelo valor para o qual ele está se aproximando; nesse caso, 2.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 7) = 3(2) - 7 = -1$$



4 - Continuidade das funções

Ao final deste módulo, você será capaz de reconhecer a continuidade de funções.

Conceito de continuidade de funções

Quando falamos que uma função $f(x)$ é contínua em determinado ponto do domínio, por exemplo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, queremos dizer que o gráfico dessa função não apresenta quebras, ou buracos. Ou seja, não ocorre nenhuma interrupção no gráfico da função $f(x)$ no ponto $\boldsymbol{a}$.

Uma função f(x) é contínua em determinado ponto, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, do domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

A função é definida no ponto $\boldsymbol{a}$ ou seja, $\mathrm{f}(\boldsymbol{a})$ existe;

$$\text{limite } \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe;}$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Uma função não é contínua (ou descontínua) no ponto $x = a$ quando não existe $f(a)$, se não existe $\lim_{x \to a} f(x)$, ou se $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Atenção!

As funções elementares são funções contínuas.

Exemplos

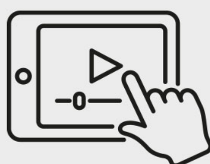
Agora, vamos conhecer alguns exemplos de continuidade de funções.



Continuidade de funções - exemplo 1

Veja a solução de um problema com continuidade de funções.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Exemplo 2

$$\text{Analise se a função } f(x) \text{ é contínua no ponto } x = 2.$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \text{ se } x > 2 \\ -2x + 4 \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$$

Solução:

$$\text{Verificar se a função f é definida no ponto } x = 2.$$

$$f(x) = -2x + 4$$
$$f(2) = -2(2) + 4$$
$$f(2) = 0$$

$$\text{Verificar se o limite } \lim_{x \to 2} f(x) \text{ existe.}$$

Cálculo dos limites laterais.

Para $x < 2, \mathrm{f}(x) = -2x + 4$, temos:

$$f(x) = -2x + 4$$
$$f(2) = -2(2) + 4$$
$$f(2) = 0$$

$$\text{Para } x > 2, f(x) = 3x + 1, \text{ temos:}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(3x + 1) = 3(2) + 1 = 7$$

Exemplo 3

$$\text{Analise se a função } f(x) \text{ é contínua no ponto } x = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solução:

Verificar se a função f é definida no ponto $x = 1$.

$f(1) = 2$

$\text{Verificar se o limite } \lim_{x \to 1} f(x) \text{ existe.}$

Cálculo dos limites lateraís.

Para $x < 1, f(x) = 2x^2 - 3x + 2$, temos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} = \left(2x^2 - 3x + 2\right) = 2(1)^2 - 3(1) + 2 = 1$$

$$\text{Para } x > 1, f(x) = 2 - x^2, \text{ temos:}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} = \left(2 - x^2\right) = 2 - (1)^2 = 1$$

Como os limites laterais existem e são iguais a 1, concluímos que o limite da função existe.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$\text{Veja que } \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1). \text{ Logo, a função não é contínua em } x = 1.$$

Exemplo 4

$$\text{Analise se a função } f(x) \text{ é contínua no ponto } x = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Solução:

Verificar se a função f é definida no ponto $x = 1$.

$$f(1) = 1$$

$$\text{Verificar se o limite } \lim_{x \to 1} f(x) \text{ existe.}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$$\text{Veja que } \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1). \text{ Logo, a função não é contínua em } x = 1.$$

Depois de conhecer as continuidades de funções e ver alguns exemplos, chegou a hora de resolver algumas questões sobre o assunto.

Atividades

Questão 1

Seja $f(x)$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ k & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

O valor da constante k para que a funçåo seja contínua em $x = 2$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 2$, temos que fazer

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x - 3 = 2 - 3 = -1$$
$$f(2) = a$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow a = -1$$

Questão 2

Seja $f(x)$ uma funçåo definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{se } x \geq 1 \\ kx^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

O valor da constante k para que a funçåo seja contínua em $x = 1$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 1$, temos que fazer

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

Cálculo dos limites laterais:

Para $x > 1, f(x) = xe^{x^2}$, temos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} xe^{x^2} = 1.\, e^{1^2} = e$$

Para $x < 1, f(x) = kx^2$, temos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} kx^2 = k(1)^2 = k$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow k = e$$

Questão 3

As abscissas dos pontos de descontinuidade da função $y = \frac{x-3}{x^2-4x+3}$ formam o conjunto:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Fatorando a função, temos:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3} = \frac{x-3}{(x-1)(x-3)}$$

Logo, as abscissas dos pontos de descontinuidade formam o conjunto $[1, 3]$.

Questão 4

Seja $f(x)$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - k^2 & \text{se } x < 4 \\ kx + 20 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

O valor da constante k para que a função seja contínua em $x = 4$ é igual a:

Digite sua resposta aqui

Chave de resposta

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 4$, o limite $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$.

Calculando os limites laterais:

Para $x > 4$, $f(x) = kx + 20$, temos:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx + 2) = kx + 20 = 4k + 20$$

Para $x < 4$, $\mathrm{f}(x) = x^2 - k^2$, temos:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (4)^2 - k^2 = 16 - k^2$$

Fazendo $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x)$, temos:

$$4k + 20 = 16 - k^2$$

$$k^2 + 4k + 20 - 16 = 0$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

Resolvendo a equação do 2° grau encontramos $k = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

(PUC-SP) Sobre a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

podemos afirmar que

A é definida e contínua para todo x real.

B é definida e contínua somente para x > 3.

C é definida para todo x real e descontínua somente para x = 3.

D é definida e contínua somente para x ≤ 3.

E é definida para todo x real e descontínua somente para x = 0.

Parabéns! A alternativa C está correta.

A função é definida em $x = 3$, pois $f(3) = 1$.

Verificando os limites laterais da função dada:

Para $x > 3$, $f(x) = \sqrt{x-3}$, temos:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = \sqrt{3-3} = 0$$

Para $x < 3$, $f(x) = 1$, temos:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 1 = 1$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite da função não existe.

A função é descontínua em $x = 3$.

Questão 2

(UF - Uberlândia-MG) A função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ não está definida para $x = 1$. Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 1$, devemos completá-la com f(l) igual a:

A 0

B 1/3

C -2

D 2/3

E -2/3

Parabéns! A alternativa D está correta.

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 1$ temos que fazer

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$
$$\lim_{x\to 1} = \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1+1}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}$$
$$f(1) = \frac{2}{3}$$

Considerações finais

Apresentamos o conceito intuitivo de limite, por meio da análise do comportamento de uma função, e o cálculo de limites de funções algébricas, utilizando a substituição direta. Em seguida, verificamos como calcular limites de funções envolvendo indeterminações. Por fim, abordamos os limites laterais e analisamos a continuidade de algumas funções.



Podcast

Para ouvir o *áudio*, acesse a versão online deste conteúdo.



Explore +

Confira o que separamos especialmente para você!

Pesquise na internet vídeos e curiosidades sobre matemática e o mundo da lógica.

Assista ao vídeo **À espera da meia-noite**, de Laura Leticia Ramos Rifo, Patrícia Roman e Antonio Carlos de Andrade Campello Junior.

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 10. ed. Tradução: Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2014.

FLEMMING, D. M. Cálculo A: **Funções, limite, derivação, integração**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**: volume 1. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HOFFMANN, L. D. **Cálculo - um curso moderno e suas aplicações**: tópicos avançados. 11. ed. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. Tradução: Noveritis do Brasil. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**: volume I. Tradução: Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

WAITS, B. K.; FOLEY, Q. D.; DEMANA, F. **Pré-cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?



Relatar problema